

## 令和5年度前期日程入学試験問題

# 数 学 B

## 理 学 部

### 注 意 事 項

- ① 試験開始の指示があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 問題冊子は、3ページ(表紙, 白紙を除く)です。試験開始後、確認下さい。
- ③ 問題は、**1**から**3**まで3問あります。すべてに解答下さい。
- ④ 解答は、別紙の解答用紙に記入下さい。
- ⑤ 受験番号は、解答用紙の指定の欄に用紙ごとに正しく記入下さい。
- ⑥ 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示下さい。

## 数 学 B

1  $f(x) = x + 2 + \frac{2}{x-1}$  ( $x \neq 1$ ) とする。以下の各問に答えよ。

- (1) 関数  $y = f(x)$  の増減, 極値, グラフと  $x$  軸との交点, グラフの凹凸, 変曲点, 漸近線を調べ, グラフの概形をかけ。
- (2)  $k$  を実数の定数とする。方程式  $f(x) = k$  の異なる実数解の個数を求めよ。
- (3) 曲線  $y = \log f(x)$  ( $x > 1$ ) と直線  $y = \log 6$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。ただし, 対数は自然対数とする。

2  $t$  を正の実数とする。四面体 OABC において、

$$OA = OB = OC = t, \quad AB = BC = CA = 2$$

とする。△ABC の重心を G とする。辺 AB の中点を M とし、点 M から直線 OC に下ろした垂線と直線 OC との交点を N とする。 $s$  を実数とし、

$$\overrightarrow{ON} = s \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

とおく。以下の各問に答えよ。

- (1) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}$ ,  $\vec{c} \cdot \vec{a}$  をそれぞれ  $t$  を用いて表せ。
- (2)  $|\overrightarrow{OG}|$  を  $t$  を用いて表せ。また、 $t$  のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3)  $s$  を  $t$  を用いて表せ。また、 $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{MN}|$  となる  $t$  の値を求めよ。
- (4)  $t$  が (2) の範囲を動くとき、 $|\overrightarrow{MN}| + |\overrightarrow{NC}|$  の最大値を求めよ。

**3**  $n$  を自然数とする。  $z$  を 0 でない複素数とし、

$$S = z^{-2n} + z^{-2n+2} + z^{-2n+4} + \cdots + z^{-2} + 1 + z^2 + \cdots + z^{2n-4} + z^{2n-2} + z^{2n}$$

とする。以下の各問に答えよ。

- (1)  $z^{-1}S - zS$  を計算せよ。
- (2)  $i$  を虚数単位とし、  $\theta$  を実数とする。  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  のとき、自然数  $k$  に対して、  $z^{-k} + z^k$  の実部と  $z^{-k} - z^k$  の虚部を  $\theta$  と  $k$  を用いて表せ。
- (3)  $\theta$  を実数とし、  $\sin \theta \neq 0$  とする。次の等式を証明せよ。

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos 2k\theta = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta}$$