

令和5年度後期日程入学試験【総合問題】解答例

導出過程は一通りでないので省略しています。論述による解答は例示です。

1

問1 $\frac{\pi}{6}$

問2 (1) それぞれ

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta = 2 \cos \theta (1 - 3 \sin^2 \theta),$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2 \cos 2\theta \sin \theta + \sin 2\theta \cos \theta = 2 \sin \theta (2 - 3 \sin^2 \theta).$$

上と同等の別表現もあるが、それらも正解である。

(2) 問2 (1) より $\frac{dy}{dx} = \tan \theta \frac{2 - 3 \sin^2 \theta}{1 - 3 \sin^2 \theta}$ となる。 $0 \leq \theta \leq \alpha$ の範囲で
 $0 \leq \sin \theta \leq \frac{1}{2}$ であるため、 $\frac{dy}{dx} \geq 0$ となる。

問3 (1) I_1 と I_2 はそれぞれ

$$I_1 = \frac{\sqrt{3}}{16},$$

$$I_2 = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

(2) $\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}$

2

問1

(1) $\sqrt{2g\{h - r(1 - \cos \theta)\}}$

(2) $mg \left(\frac{2h}{r} - 2 + 3 \cos \theta \right)$

(3) $\frac{5}{2}r$

問 2

(1) $\frac{r}{2}(2 + 3 \sin \beta)$.

(2) 速度の x 成分, y 成分をそれぞれ v_{Ex}, v_{Ey} とすると,

$$v_{Ex} = -\sqrt{gr \sin \beta} \sin \beta, \quad v_{Ey} = \sqrt{gr \sin \beta} \cos \beta.$$

(3) 頂点 F の座標 (x, y) はそれぞれ,

$$x = r \cos^3 \beta$$

および

$$y = r \sin \beta \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \beta \right).$$

3

問 1 原点 O より上 d を C とし, 球の中心 O', x 軸で距離 r のところの球面 A 上の点 A' で作る直角三角形 O'A'C で $r^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd - d^2$ が成り立つ。 $d \ll R$ として, $\left(\frac{d}{R}\right)^2$ の項を無視する近似を行う。すると $r^2 \doteq 2Rd$ とおけて,

$$d = \frac{r^2}{2R}.$$

(別解) 上と同様の直角三角形 O'A'C の各辺の長さの関係から

$$(R - d) = \sqrt{R^2 - r^2}$$

が成り立つ。これを d について, 近似を適用しながら解くと,

$$\begin{aligned} d &= R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]^{1/2} \\ &\doteq R - R \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] = \frac{r^2}{2R}. \end{aligned}$$

問 2 強めあう条件は

$$r = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right) R \lambda}.$$

弱めあう条件は

$$r = \sqrt{mR\lambda}.$$

問3 2.7 m.

問4 $\sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{R\lambda}{n}}$

問5 下から上方へとそのまま透過する光と、空気層の上面と下面でそれぞれ1回ずつ反射してから透過する光の干渉を考える。光路差は反射光の場合と変わらず、反射2回でいずれも位相の変化が π 生じるが、偶数回であるため結局位相のずれはない。よって、上からの入射光の反射と明暗の条件が逆になるので、縞の明暗の位置が逆になる。