令和４年度 後期日程入学試験問題
数学 E 解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1)　（あ）　$2+\sqrt{2}$　　（い）　$-\sqrt{2}$

(2)　（う）　-4

(3)　（え）　-12　　（お）　8

(4)　（か）　$\dfrac{1}{3}$

(5)　（き）　$-e^2$　　（く）　$3e^4$

(6)　（け）　$\dfrac{468}{7}$　　（こ）　$\dfrac{\pi}{36}$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1)　（さ）　$-\dfrac{3}{4}$　　（し）　$\dfrac{1}{4}$

(2)　（す）　-20　　（せ）　64

(3)　（そ）　$-3 \leqq x \leqq 7$

(4)　（た）　80

(5)　（ち）　$\dfrac{3}{2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1)　（つ）　89

(2)　（て）　46

(3)　（と）　57

以下は、解答欄への記載は必要ありませんが、計算方法の一例です。

$\boxed{1}$

(1)　点 $z = 1 - \sqrt{3}i$ の絶対値は $|z| = 2$, 偏角は $\arg z = -\dfrac{\pi}{3}$ である。z を原点の回りに $\dfrac{7}{12}\pi$ だけ回転させると, 絶対値は変わらず, 偏角は

$$-\frac{\pi}{3} + \frac{7}{12}\pi = \frac{\pi}{4}$$

となる。従って,

$$\begin{aligned} w &= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + \left(2 - 2\sqrt{2}\,i\right) \\ &= \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i\right) + \left(2 - 2\sqrt{2}\,i\right) \\ &= 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i \end{aligned}$$

となる。従って, $p = \underline{2+\sqrt{2}}_{\text{(あ)}}$,　$q = \underline{-\sqrt{2}}_{\text{(い)}}$ である。

(2)　$x < 2$ のとき $|x-2| = -(x-2)$ であるので,

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-4}{|x-2|} = \lim_{x\to 2-0} \frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)} = -\lim_{x\to 2-0}(x+2) = \underline{-4}_{\text{(う)}}.$$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2) = \lim_{x\to 2}(x-1)(x-2) = 0$ であるので, $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^3+ax^2+44x-48) = 0$ である。従って, $8+4a+88-48 = 4a+48 = 0$ より, $a = \underline{-12}_{\text{(え)}}$ である。

このとき, $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = (x-2)(x^2-10x+24)$ であるので,

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-10x+24)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-10x+24}{x-1} \\ &= \frac{4-20+24}{2-1} = \underline{8}_{\text{(お)}}. \end{aligned}$$

(4)　$f'(x) = \dfrac{x^2}{x^3+2}$ であるので,

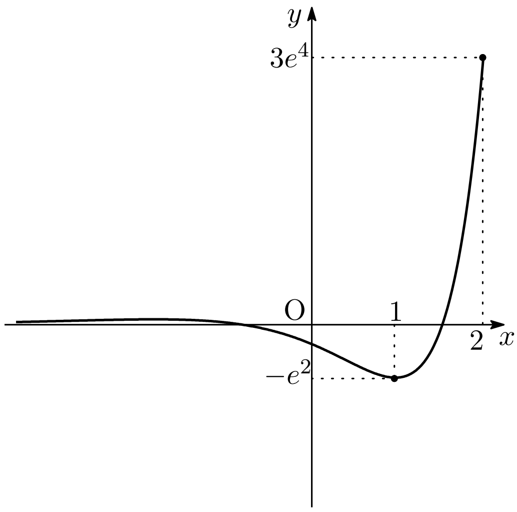
$$f'(1+\sqrt{3}) = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})^3+2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{12+6\sqrt{3}} = \underline{\frac{1}{3}}_{\text{(か)}}.$$

(5)　$g(x) = (2x^2-2x-1)e^{2x}$ とおく。この導関数は,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (4x-2)e^{2x} + 2(2x^2-2x-1)e^{2x} \\ &= 4(x-1)(x+1)e^{2x} \end{aligned}$$

である。定義域 $-2 \leqq x \leqq 2$ で e^{2x} は常に正であるので, $y' = 4(x-1)(x+1)e^{2x}$ は $x = \pm 1$ の前後で符号変化する。従って, 増減表とグラフの概形は次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(x)$	$12e^{-4}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$12e^4$
$g(x)$	$11e^{-4}$	$\nearrow$	$3e^{-2}$	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	$3e^4$



$$g(-2) = 11e^{-4} > -e^2 = g(1),$$

$$g(-1) = 3e^{-2} < 3e^4 = g(2)$$

であるので, $-2 \leqq x \leqq 2$ における $g(x)$ の最小値は $g(1) = -e^2$, 最大値は $g(2) = 3e^4$ である。以上から, 求める y の値域は, $\underline{-e^2}_{\text{(き)}} \leqq y \leqq \underline{3e^4}_{\text{(く)}}$ である。

(6) (i) $t = \sqrt[3]{1-x}$ とおくと, $x = 1 - t^3$ であり, $\dfrac{dx}{dt} = -3t^2$, すなわち $dx = -3t^2 dt$ である。また, $x = -7$ のとき, $t = 2$ であり, $x = 1$ のとき, $t = 0$ であるので,

$$\begin{aligned}\int_{-7}^{1} (2-x)\sqrt[3]{1-x}\,dx &= \int_{2}^{0} (1+t^3)\,t\,(-3t^2)dt = 3\int_{0}^{2} (t^6 + t^3)\,dt \\ &= 3\left[\frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{4}t^4\right]_0^2 = 3\left(\frac{128}{7} + 4\right) \\ &= 3 \times \frac{156}{7} = \underline{\frac{468}{7}}_{\text{(け)}}.\end{aligned}$$

(ii) $\sin^2 3x = \dfrac{1 - \cos 6x}{2}$ であるので,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \sin^2 3x\,dx &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} (1 - \cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{6}\sin 6x\right]_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\sin\frac{2\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{18} = \underline{\frac{\pi}{36}}_{\text{(こ)}}.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) 解と係数の関係から, $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$ である。このとき,

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{4},\quad \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{4}$$

である。従って, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ を解にもつ 2 次方程式は, $x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}=0$ となり,

$$p=\underline{-\frac{3}{4}}_{(さ)},\quad q=\underline{\frac{1}{4}}_{(し)}$$

となる。

(2) $Q(x)=x^2(x-4)-4(x-4)=(x+2)(x-2)(x-4)$ であるので, 仮定から $P(x)$ は $x-2$ でも $x-4$ でも割り切れる。因数定理から,

$$P(2)=2(4a+b+16)=0,\qquad P(4)=4(16a+b+256)=0$$

である。$\begin{cases}4a+b+16\ =0\\16a+b+256=0\end{cases}$ より, $\begin{cases}a=\underline{-20}_{(す)}\\b=\ \underline{64}_{(せ)}\end{cases}$ を得る。

(3) 絶対値記号の中の符号で場合分けする。まず, $x<-\frac{1}{2}$ においては, $(-2x-1)-x\leqq 8$ を解くと, $x\geqq -3$ である。一方で, $x\geqq -\frac{1}{2}$ において, $(2x+1)-x\leqq 8$ を解くと, $x\leqq 7$ となる。

以上を併せると, 不等式 $|2x+1|-x\leqq 8$ の解は, $\underline{-3\leqq x\leqq 7}_{(そ)}$ である。

(4) 39312 を素因数分解すると,

$$39312 = 2^4\times 3^3\times 7\times 13$$

である。39312 の正の約数は, $2^a\times 3^b\times 7^c\times 13^d$ と表され, $a=0,1,2,3,4$ の 5 通り, $b=0,1,2,3$ の 4 通り, $c=0,1$ の 2 通り, $d=0,1$ の 2 通りであるので, それらの個数は全部で $5\times4\times2\times2=\underline{80}_{(た)}$ 個である。

(5) $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}=(2x+3,3)$, $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(-x+3,-3)$ である。$\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)\perp\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)$ であるので, 内積を考えると,

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)&=(2x+3)(-x+3)+3\cdot(-3)\\&=-2x^2+3x=-2x\left(x-\frac{3}{2}\right)=0\end{aligned}$$

である。従って, $x>0$ であるので, $x=\underline{\frac{3}{2}}_{(ち)}$ である。

$\boxed{\mathbf{3}}$

調査対象の来園者 200 人の集合を X とし, そのうちのアトラクション A, B, C のそれぞれを利用した人の集合を S_A, S_B, S_C とおく。さらに, X の部分集合 Y の元の人数を $n(Y)$ で表すものとする。

(1) 200 人のうち, A, B, C の少なくとも 1 つ以上を利用した人数は, $200-17=183$ であり, そのうち B のみを利用したのは 21 人であるので, $n(S_A \cup S_C)=183-21=162$ である。従って, A と C の両方を利用した人数 $n(S_A \cap S_C)$ は,

$$\begin{aligned} n(S_A \cap S_C) &= n(S_A)+n(S_C)-n(S_A \cup S_C) \\ &= 135+116-162 = \underline{89}_{(つ)} \end{aligned}$$

(2) A は利用したが, C は利用しなかった人数は,

$$n(S_A)-n(S_A \cap S_C) = 135-89 = \underline{46}_{(て)}$$

(3) C は利用したが, A は利用しなかった人数は,

$$n(S_C)-n(S_A \cap S_C) = 116-89 = 27$$

である。

下の図のように, $P=S_A \cap S_B \cap S_C$ とおき, $x=n(P)$ とおく。さらに, A, B は利用したが C は利用しなかった人数を y とし, B, C は利用したが A は利用しなかった人数を z とする。このとき, 3 種類のうち, A のみを利用したのは $46-y$ 人, C のみを利用したのは $27-z$ 人と表される。

従って, $y \leqq 46$, $z \leqq 27$ より, $y+z \leqq 73$ であり, 一方で $x+y+z=151-21=130$ であるので,

$$x = 130-(y+z) \geqq 130-73 = \underline{57}_{(と)}$$