

## 令和3年度後期日程入学試験問題

# 数 学 C

## 理 学 部

### 注 意 事 項

- ① 試験開始の指示があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 問題冊子は、3ページ(表紙、白紙を除く)です。試験開始後、確認してください。
- ③ 問題は、**1**から**3**まで3問あります。すべてに解答しなさい。
- ④ 解答は、別紙の解答用紙に記入しなさい。
- ⑤ 受験番号は、解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入しなさい。
- ⑥ 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示しなさい。

## 数 学 C

- 1  $t > 0$  とし、曲線  $C: y = \sqrt{x}$  上の点  $(t, \sqrt{t})$  における  $C$  の法線と  $x$  軸との交点の  $x$  座標を  $f(t)$  とする。数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = f(1), a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の各問に答えよ。

- (1)  $f(t)$  を求めよ。  
(2)  $a_n$  を求めよ。  
(3)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{2k}}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  とする。不等式

$$|S_n - S| < \frac{1}{2021}$$

を満たす自然数  $n$  の最小値を求めよ。

- (4)  $a_n \leq x \leq a_{n+1}$  の範囲で、曲線  $C$ , 2 直線  $x = a_n$ ,  $x = a_{n+1}$ , および  $x$  軸で囲まれた部分の面積を  $T_n$  とする。極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{\sqrt{a_n}}$  を求めよ。

2  $i$  を虚数単位とする。  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 4\sqrt{3}i$  とし,  $\gamma$  を複素数とする。複素数平面において, 3点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$  を頂点とする三角形  $ABC$  を考える。以下の各問に答えよ。

(1)  $\angle ABC$  と  $\angle BAC$  の大きさがともに  $\frac{\pi}{6}$  となるような  $\gamma$  をすべて求めよ。

以下, (1) で求めた  $\gamma$  のうち, 絶対値が最小であるものを  $\delta$  とし, 3点  $A$ ,  $B$ ,  $D(\delta)$  を頂点とする三角形  $ABD$  を考える。ただし, 複素数平面の原点を  $O(0)$  とする。

(2)  $\delta$  と三角形  $ABD$  の面積  $S$  を求めよ。

(3) 点  $P(z)$  が線分  $AB$  上を動くとき, 線分の長さの和  $OP + PD$  の最小値を与える  $z$  を求めよ。

3 A, B, C の 3 人がいて, 「赤」「青」「白」の玉が 1 つずつ合計 3 個入った袋がある。まず最初に, 袋の中から A, B, C の順に玉を 1 つずつ取り出す。そこで, 各自が取った玉の色を 3 人で確認して袋に戻す。ここまでの操作を 1 巡目とする。 $n$  巡目は次のように行う。ただし,  $n$  は 2 以上の自然数とし, 玉の色の確認は 3 人で行うとする。

- (i) 袋の中から A, B, C の順に玉を 1 つずつ取り出して, (ii)に進む。
- (ii) A が取った玉と  $(n - 1)$  巡目に A が取った玉の色が同じときは, A が勝ちとして終了する。それ以外の場合は, (iii)に進む。
- (iii) B が取った玉と  $(n - 1)$  巡目に B が取った玉の色が同じときは, B が勝ちとして終了する。それ以外の場合は, (iv)に進む。
- (iv) C が取った玉と  $(n - 1)$  巡目に C が取った玉の色が同じときは, C が勝ちとして終了する。それ以外の場合は, 3 人とも各自が取った玉を袋に戻す。ここまでの操作を  $n$  巡目とし, (i)に戻り  $(n + 1)$  巡目を始める。

$n$  巡目で A が勝つ確率を  $a_n$ , B が勝つ確率を  $b_n$ , C が勝つ確率を  $c_n$  とする。以下の各問に答えよ。

- (1)  $a_2, b_2, c_2$  をそれぞれ求めよ。
- (2)  $a_3, b_3, c_3$  をそれぞれ求めよ。

以下では, 袋の中に「赤」「青」「白」の他に「黄」の玉が 1 つ加えられた場合を考える。上記と同じ 1 巡目からの操作を行う。 $n$  巡目で A が勝つ確率を  $p_n$ , B が勝つ確率を  $q_n$ , C が勝つ確率を  $r_n$  とする。

- (3)  $p_2, q_2, r_2$  をそれぞれ求めよ。
- (4)  $n$  巡目で誰かが勝つ確率を求めよ。