令和２年度後期日程入学試験問題

数　　学　C

理　学　部

注 意 事 項

① 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

② 問題冊子は，４ページ(表紙，白紙を除く)です。試験開始後，確認してください。

③ 問題は，$\boxed{1}$から$\boxed{4}$まで４問あります。すべてに解答しなさい。

④ 解答は，別紙の解答用紙に記入しなさい。

⑤ 受験番号は，解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入しなさい。

⑥ 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示しなさい。

数　学　C

1　関数 $f(x) = \log \sqrt{x^2 + 4}$ について，以下の各問に答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1)　関数 $y = f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，そのグラフをかけ。

(2)　曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きを $a(t)$ とする。t がすべての実数値をとって変化するとき，$a(t)$ の最大値と最小値，およびそのときの t の値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{2}$ $f(x)=(\sqrt{2}+1)\sqrt{|x|}$，$g(x)=|x|+\sqrt{2}$ とする。2つの曲線 $C_1 : y=f(x)$ と $C_2 : y=g(x)$ により囲まれた部分を D とする。このとき，以下の各問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 と C_2 の交点の座標をすべて求め，D を図示せよ。

(2) D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{3}$ 助さんと格さんのいずれか一方が，黄門様の使者として江戸に出向くことになった。そのために，次の方法で使者を決める。はじめに，助さんと格さんは共に2ポイントずつ持っている。助さんと格さんが剣道の試合を繰り返し行い，試合をするたびに，その結果に応じてポイントが次のように移動する。

$\left\{\begin{array}{l}\text{もし助さんが勝てば，格さんから助さんに1ポイント移動する。}\\ \text{もし格さんが勝てば，助さんから格さんに1ポイント移動する。}\end{array}\right.$

なお，各回の剣道の試合で助さんが勝つ確率は p，格さんが勝つ確率は q であり，引き分けは無いとする。

どちらか1人のポイントが4になるまで剣道の試合を繰り返し，ポイントが4になったものが使者となる。ちょうど n 回目の試合で助さんが使者に決まる確率を S_n，格さんが使者に決まる確率を K_n とする。ただし，n は自然数とする。以下の各問に答えよ。

(1) S_1，S_2，S_3 と S_4 を求めよ。

(2) S_{2k-1} と S_{2k} を求めよ。ただし，k は自然数とする。

(3) 助さんが使者となる確率 $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。また，格さんが使者となる確率 $K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n$ を求め，$S + K = 1$ であることを証明せよ。

4 n を4以上の自然数とする。関数 $f_n(x) = (1-x)e^{nx} - 1$ について，以下の各問に答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) 関数 $f_n(x)$ の増減を調べることにより，方程式 $f_n(x) = 0$ は $0 < x < 1$ においてただ1つの解をもつことを証明せよ。

以下，$0 < x < 1$ における方程式 $f_n(x) = 0$ の解を a_n とする。

(2) 極限 $\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

(3) 不等式 $n^2 < e^{n-1}$ を証明せよ。ただし，$e^3 > 20$ である。

(4) $b_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ とする。不等式 $f_n(b_n) > 0$ を証明せよ。

(5) 極限 $\lim_{n \to \infty} n(1 - a_n)$ を求めよ。