令和 7 年度前期日程入学試験問題 数学 D 解答例

以下は計算方法や論述の一例です。

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) (i) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-x^2-2x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^2-2}=\underline{-3}$

(ii) $t=\dfrac{1}{x}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{3}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\sin 3t-\sin t)\\&=3\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\\&=3\cdot 1-1=\underline{2}\end{aligned}$$

(2) (i) $t=4-x$ とおくと, $x=0$ から $x=3$ のとき $t=4$ から $t=1$ に変化する。さらに, $\dfrac{dt}{dx}=-1$ であるので,

$$\begin{aligned}\int_0^3\frac{x}{(4-x)^3}\,dx=\int_4^1\frac{4-t}{t^3}\cdot -dt=\int_1^4 4t^{-3}-t^{-2}\,dt&\\=4\left[\frac{1}{-3+1}t^{-3+1}\right]_1^4-\left[\frac{1}{-2+1}t^{-2+1}\right]_1^4&\\=-2\left(4^{-2}-1^{-2}\right)+\left(4^{-1}-1^{-1}\right)&\\=-2\left(\frac{1}{16}-1\right)+\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{15}{8}-\frac{3}{4}=\underline{\frac{9}{8}}&\end{aligned}$$

(ii) 部分積分法により求める。

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} 1\cdot(\log x)^2\ dx &= \Big[x\cdot(\log x)^2\Big]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\ dx\\ &= \Big[x\cdot(\log x)^2\Big]_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2}\log x\ dx\\ &= \Big[x\cdot(\log x)^2\Big]_1^{e^2} - 2\Big[x\log x - x\Big]_1^{e^2}\\ &= \Big(4e^2-0\Big) - 2\Big\{(2e^2-e^2)-(-1)\Big\}\\ &= 4e^2 - 2\Big\{(2e^2-e^2)-(-1)\Big\}\\ &= 4e^2-4e^2+2e^2-2 = \underline{2e^2-2}\end{aligned}$$

(3) 合成関数の微分法により $f(x)=\left(\dfrac{x}{x+a}\right)^{\frac{1}{3}}$ を微分すると,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x+a}\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot\left(\frac{x}{x+a}\right)'\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x+a}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{x'(x+a)-x(x+a)'}{(x+a)^2}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x+a}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{a}{(x+a)^2}\end{aligned}$$

よって,

$$f'(a)=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2a}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{a}{4a^2}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\frac{1}{4a}=\frac{\sqrt[3]{4}}{12a}$$

となる。仮定によりこれが $\sqrt[3]{4}$ に一致しているので, $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{12a}=\sqrt[3]{4}$ となり,
$\underline{a=\dfrac{1}{12}}$ となる。

$\boxed{\textbf{2}}$

(1)

$$x+\frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}$$

である。すると,

(i)

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=(\sqrt{5})^3-3(\sqrt{5})=\underline{2\sqrt{5}}$$

(ii)

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(\sqrt{5})^2-2=3$$

に注意して,

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=3^2-2=\underline{7}$$

(2) 6 試合目で A チームが優勝するということは, 5 試合目まで A チームが 3 勝し, 6 試合目で A が勝つ確率を求めればよい。従って, A が勝つ確率は $\frac{1}{3}$ なので, 求める答えは以下のように反復試行の確率を用いて与えられる。

$$\begin{aligned}{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}&=\frac{5\cdot4\cdot3}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\\&=10\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\\&=\underline{\frac{40}{729}}\end{aligned}$$

(3) $t=\sin\theta$ とする。t の動く範囲は $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より $0 \leqq t \leqq 1$ である。与式を t で表すと以下のようになる。

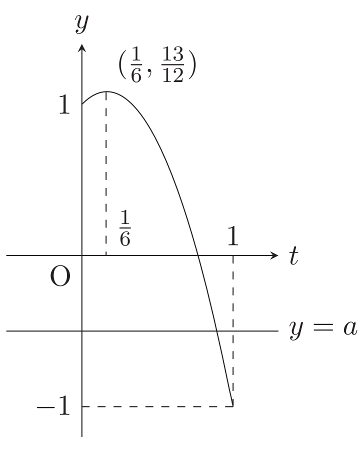
$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta-\cos^2\theta-\sin\theta+a &= 2\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)-\sin\theta+a \\ &= 2t^2-(1-t^2)-t+a \\ &= 3t^2-t+a-1=0 \end{aligned}$$

これより,

$$-3t^2+t+1=a \quad \cdots\cdots(*)$$

を満たす t $(0 \leqq t \leqq 1)$ のうち, θ がちょうど 2 つであるような定数 a の値の範囲を求めればよい。ところが, 明らかに $t=\sin\theta=1$ のとき θ は 1 つである。

よって, 題意を満たすのは, $0 \leqq t < 1$ の範囲で, $(*)$ を満たす t がちょうど 1 つの解をもつときである。そこで, $f(t)=-3t^2+t+1$ とおいて, 平方完成すると, $f(t)=-3\left(t-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{13}{12} \quad (0 \leqq t < 1)$ となり, グラフは以下となる。



以上から, $0 \leqq t < 1$ の範囲で, 直線 $y=a$ と関数 $y=f(t)$ のグラフの共有点が 1 つである a の値の範囲は, $\underline{-1<a<1,\ a=\dfrac{13}{12}}$ となる。

$\boxed{\textbf{3}}$

(1) 初項から第 n 項までの和を $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とし, 公比を $r = \sqrt{2}$ とする。

$$\begin{aligned} 14 = S_{10} - S_4 &= \frac{a_1(1-r^{10})}{1-r} - \frac{a_1(1-r^4)}{1-r} \\ &= \frac{a_1\{(1-r^{10})-(1-r^4)\}}{1-r} \\ &= \frac{a_1(r^4-r^{10})}{1-r} = \frac{a_1(2^2-2^5)}{1-\sqrt{2}} = \frac{a_1(-28)}{1-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

よって, $\dfrac{-28a_1}{1-\sqrt{2}} = 14$ より $\underline{a_1 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

(2) (i) 与式を変形すると $\tan\theta > -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると,

答えは次のようになる。$\underline{0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\quad \dfrac{5}{6}\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi,\quad \dfrac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi}$

(ii) 三角関数の合成から $2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) > -1$ となり, $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) > -\dfrac{1}{2}$ を得る。

$\alpha = \theta - \dfrac{\pi}{3}$ とおくと, $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \alpha < \dfrac{5}{3}\pi$ である。この範囲において,

$$\sin\alpha > -\frac{1}{2}$$

を満たす α の範囲を求めればよいので, α の範囲は $-\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{7}{6}\pi$ となる。

よって, 求める θ の範囲は $\underline{\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi}$ である。

(3) $x+7y=1$ のもとで, 相加・相乗平均を用いる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{7x}+\frac{1}{y}=(x+7y)\left(\frac{1}{7x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{7}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+7\\ =\frac{50}{7}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqq\frac{50}{7}+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}\\ =\frac{50}{7}+2=\frac{64}{7}\end{aligned}$$

等号は $\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{x}$ のとき, すなわち, $x^2=y^2$ のとき成立する。$(x-y)(x+y)=0$ として,
$x=y$ のときは, $x+7y=1$ から $x=y=\dfrac{1}{8}$ となる。
$x=-y$ のときは, $x+7y=1$ から $x=-\dfrac{1}{6}$, $y=\dfrac{1}{6}$ となるので, 条件 $x>0$ に反するので不適である。
以上から, $\underline{x=y=\dfrac{1}{8}\text{ のとき最小値 }\dfrac{64}{7}}$ をとる。

$\boxed{4}$

(1) 点 P は直線 AB 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (t: 実数)$ と表すことができる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2, -1, 3) + t(1, -1, 1) = (2+t, -1-t, 3+t) \qquad \cdots(*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の大きさの 2 乗を計算すると,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = |(2+t, -1-t, 3+t)|^2 = (2+t)^2 + (-1-t)^2 + (3+t)^2 = 3t^2 + 12t + 14$$

よって, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 3(t+2)^2 + 2$ となる。

以上から, $t = -2$ のとき, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ が最小となるので, 従って $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となる。

このときの点 P の座標は $(*)$ より $\underline{\mathrm{P}(0, 1, 1)}$ である。

(2) 複素数 z は原点を中心とする半径 2 の円周上にあるから, $|z| = 2$ を満たす。$w = \dfrac{1}{1-z}$ より, $z = \dfrac{w-1}{w}$ となり, $|z| = 2$ へ代入すると, $|w-1| = 2|w|$ を得る。両辺 2 乗して, $(w-1)\overline{(w-1)} = 4w\overline{w}$ となり, 整理して $3w\overline{w} + (w + \overline{w}) - 1 = 0$ となる。さらに変形して,

$$\left(w + \frac{1}{3}\right)\left(\overline{w} + \frac{1}{3}\right) = \left(w + \frac{1}{3}\right)\overline{\left(w + \frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{9}$$

従って, $\left|w + \dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{2}{3}$ となるので, w は $\underline{点\ -\dfrac{1}{3}\ を中心とする半径\ \dfrac{2}{3}\ の円を描く。}$

(3) $F(x) = \displaystyle\int_1^x t^2 f(t)dt$ とおく。すると, $F(1) = 0$ である。よって,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}\int_1^x t^2 f(t)dt &= \lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = F'(1) \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ここで, $F'(x) = x^2 f(x)$ より, $F'(1) = f(1) = 5$ に注意すると,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}\int_1^x t^2 f(t)dt = F'(1) \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{5}{2}}$$