— 令和７年度後期日程・総合問題解答例 —

導出過程は一通りでないので一部省略しています。論述による解答は例示です。

$\boxed{1}$

問１　(1) $\dfrac{df}{dx} = x^2 e^{2x} - x.$

(2) $I = \log\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right).$

問２　(1) $y' = x(x+2)e^x$ より，$y' = 0$ となるのは $x = 0, -2$ のとき。$y'' = (x^2+4x+2)e^x$ より，$y'' = 0$ となるのは $x = -2 \pm \sqrt{2}$ のとき。関数の増減表は以下のようになり，グラフの概形は図１のようになる。

x	$\cdots$	$-2-\sqrt{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-2+\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	変曲点 $\dfrac{(2+\sqrt{2})^2}{e^{2+\sqrt{2}}}$	↗	極大 $\dfrac{4}{e^2}$	↘	変曲点 $\dfrac{(2-\sqrt{2})^2}{e^{2-\sqrt{2}}}$	↘	極小 0	↗

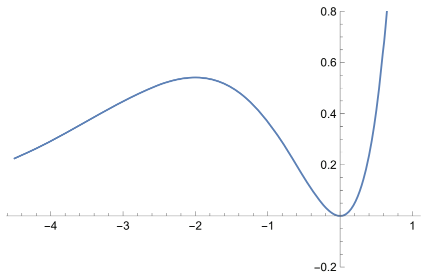

図１

(2) 曲線 C 上の点 (k, k^2e^k) における接線の式は $y - k^2e^k = k(k+2)e^k(x-k)$ である。この直線が原点を通るので，$k^2e^k = k^2(k+2)e^k$ であり，$k \neq 0$ として解くと $k = -1$ となる。従って，$b = k(k+2)e^k = -e^{-1}$。

(3) (2) より，曲線 C と直線 $y = -e^{-1}x$ を図示すると図２のようになる。接点は $(-1, e^{-1})$ で，原点で交差する。従って，$-1 \leqq x \leqq 0$ の範囲で直線と曲線 C の差を積分すれば，面積 S が求まる。

$$S = \int_{-1}^{0} (-e^{-1}x - x^2e^x)dx = \frac{11e^{-1}}{2} - 2.$$

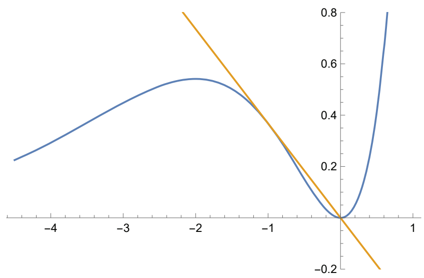

図２

$\boxed{2}$

問 1 $h_1 = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$.

問 2 $\mathrm{OA}_1 = \dfrac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$.

問 3 $h_2 = \dfrac{e^2 v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$, $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \dfrac{e v_0^2 \sin 2\theta}{g}$.

問 4 $h_{n+1} = \dfrac{e^{2n} v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$, $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = \dfrac{e^n v_0^2 \sin 2\theta}{g}$.

問 5 OA_{n+1} は問 4 の結果を足しあげればよいので

$$\mathrm{OA}_{n+1} = (1 + e + e^2 + \cdots + e^n)\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}.$$

一方，小球が点 A_n から点 A_{n+1} まで移動するのに要する時間は $\dfrac{2e^n v_0 \sin\theta}{g}$ であり，時刻 t_{n+1} は

$$t_{n+1} = (1 + e + e^2 + \cdots + e^n)\frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}\frac{2v_0 \sin\theta}{g}.$$

(別解) x 方向は等速度運動なので $t_{n+1} = \dfrac{\mathrm{OA}_{n+1}}{v_0 \cos\theta} = \dfrac{1 - e^{n+1}}{1 - e}\dfrac{2v_0 \sin\theta}{g}$.

問 6 $0 < e < 1$ より $\lim_{n\to\infty} e^n = 0$ である。従って $H = \lim_{n\to\infty} h_{n+1} = 0$ となり，無限回の衝突後は小球は床面から離れなくなる。一方，無限回の衝突に要する時間は

$$T = \lim_{n\to\infty} t_{n+1} = \frac{1}{1 - e}\frac{2v_0 \sin\theta}{g},$$

となり有限である。よって，この時間後は小球は床面で跳ね返らず，床面上を速さ $v_0 \cos\theta$ で等速直線運動する。

問 7　点 A_n に衝突した直後の運動エネルギーから衝突する直前の運動エネルギーを引いた量を ΔE_n とすると

$$\begin{aligned}\Delta E_n &= \frac{1}{2}m\{(v_0\cos\theta)^2 + (e^n v_0 \sin\theta)^2\} - \frac{1}{2}m\{(v_0\cos\theta)^2 + (e^{n-1} v_0 \sin\theta)^2\} \\ &= \frac{1}{2}me^{2n-2}(e^2 - 1)v_0^2 \sin^2\theta < 0,\end{aligned}$$

求めるのは大きさなので $|\Delta E_n| = \dfrac{1}{2}me^{2n-2}(1 - e^2)v_0^2 \sin^2\theta$.

問 8　衝突は $n = 1$ から発生するので

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta E_n| = (1 + e^2 + e^4 + \cdots)\frac{1}{2}m(1 - e^2)v_0^2 \sin^2\theta = \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2\theta.$$

$\boxed{3}$

問 1　(1) 磁束は以下のようになり，グラフは図 3 となる。

$$\Phi = \begin{cases} v\ell_2 Bt & (0 \leqq t < \frac{\ell_1}{v}) \\ B\ell_1\ell_2 & (\frac{\ell_1}{v} \leqq t \leqq \frac{2\ell_1}{v}) \\ -v\ell_2 Bt + 3B\ell_1\ell_2 & (\frac{2\ell_1}{v} < t \leqq \frac{3\ell_1}{v}) \end{cases}$$

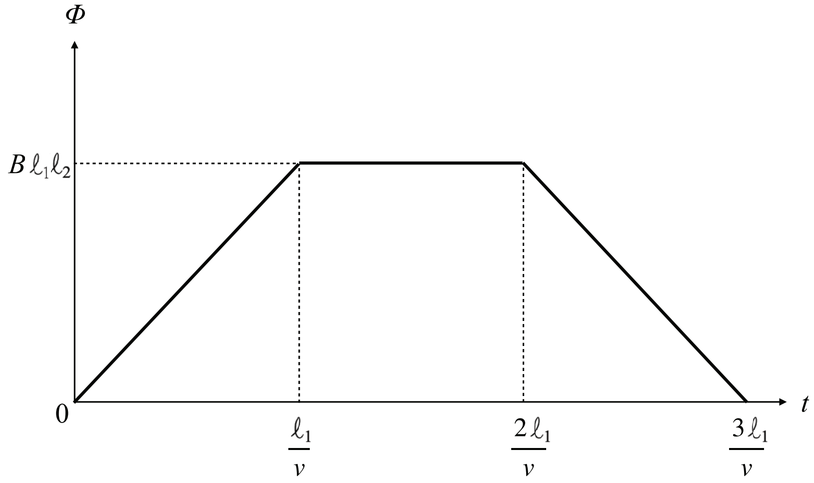

図 3

(2) 電流は以下のようになり，グラフは図 4 となる。

$$I = \begin{cases} \dfrac{v\ell_2 B}{R} & (0 \leqq t < \frac{\ell_1}{v}) \\ 0 & (\frac{\ell_1}{v} \leqq t \leqq \frac{2\ell_1}{v}) \\ -\dfrac{v\ell_2 B}{R} & (\frac{2\ell_1}{v} < t \leqq \frac{3\ell_1}{v}) \end{cases}$$

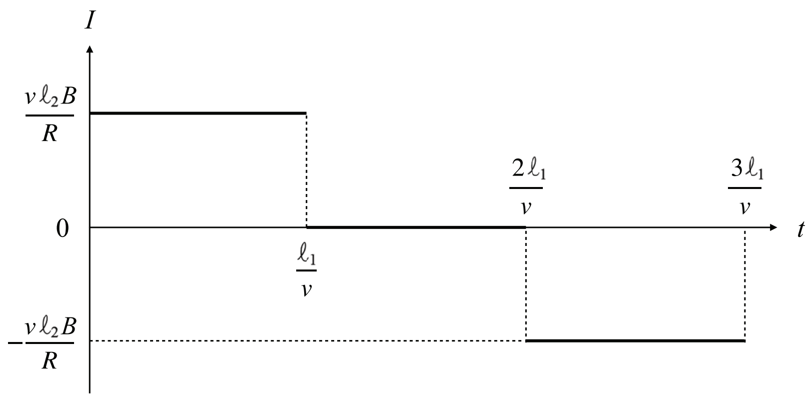

図 4

(3) ジュール熱は，$RI^2 \times \dfrac{2\ell_1}{v} = \dfrac{2v\ell_1\ell_2^2B^2}{R}$。

(4) 外力の大きさは以下のようになる。

$$F = \begin{cases} \dfrac{vB^2\ell_2^2}{R} & (0 \leqq t < \frac{\ell_1}{v}) \\ 0 & (\frac{\ell_1}{v} \leqq t \leqq \frac{2\ell_1}{v}) \\ \dfrac{vB^2\ell_2^2}{R} & (\frac{2\ell_1}{v} < t \leqq \frac{3\ell_1}{v}) \end{cases}$$

(5) 仕事は，$F \times 2\ell_1 = \dfrac{2v\ell_1\ell_2^2B^2}{R}$。

問 2 (1) 時刻 t において，コイルの磁束が貫く部分は，底辺の長さが vt で高さが vt の二等辺三角形である。その面積は $\frac{1}{2}v^2t^2$。従って，$\Phi = \dfrac{1}{2}v^2t^2B$。

(2) 誘導起電力の大きさは $\dfrac{d\Phi}{dt} = v^2Bt$ であり，電流は正の向きに流れる。従って，$I = \dfrac{v^2Bt}{R}$。

(3) 辺 ef のうち領域 2 にある部分が磁場から受ける力の x 成分は $F_x = -\dfrac{1}{2}IBvt$ であり，y 成分は $F_y = IBvt$ である。辺 eg のうち領域 2 にある部分が磁場から受ける力の x 成分は $F_x = -\dfrac{1}{2}IBvt$ であり，y 成分は $F_y = -IBvt$ である。コイルが受ける力はこれらを合計して，$(F_x, F_y) = (-IBvt, 0)$。従って外力の大きさは $F = IBvt = \dfrac{v^3B^2t^2}{R}$。

(4) 外力の向きとコイルの移動した向きは同じなので，仕事は正である。コイルを微小距離 $d\ell$ 動かすのに要する仕事は $Fd\ell = Fvdt = \dfrac{v^4B^2t^2}{R}dt$。仕事の合計は，$\displaystyle\int_0^{\frac{\ell_1}{v}} \frac{v^4B^2t^2}{R}dt = \frac{vB^2\ell_1^3}{3R}$。