

令和 7 年度後期日程入学試験問題

総 合 問 題

理 学 部

注 意 事 項

- ① 試験開始の指示があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 問題冊子は、8 ページ(表紙、白紙を除く)です。試験開始後、確認下さい。
- ③ 解答は、別紙の解答用紙に記入下さい。
- ④ 受験番号は、解答用紙の指定の欄に用紙ごとに正しく記入下さい。

1

以下の問に答えよ。解答は導出過程も含めて記述せよ。

問 1 (1) 次の関数 $f(x)$ を x について微分せよ。ただし、 e は自然対数の底である。

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - t) e^{2t} dt$$

(2) 次の定積分 I を求めよ。ただし、 $1 < a$ とする。

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{a + \sin x} dx$$

問 2 $y = x^2 e^x$ で表される曲線 C について、次の(1)から(3)に答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) 関数 $y = x^2 e^x$ の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べ、グラフの概形をかけ。
- (2) 曲線 C と直線 $y = bx$ が原点を交点とし、それ以外の 1 点で接しているとき、 b の値を求めよ。
- (3) (2)で求めた b の値に対し、曲線 C と直線 $y = bx$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

2 図1のように、なめらかで水平な床があり、時刻 t が $t = 0$ のとき質量 m の小球を床面上の原点 O から床面と角度 θ ($0 < \theta < 90^\circ$) をなす方向に速さ v_0 で投げ出した。小球は $t = t_1$ のとき点 A_1 で床と1回目の衝突をし、その後も床との衝突を繰り返した。 n を正の整数とすると、小球が n 回目に床と衝突した時刻を $t = t_n$ とし、衝突した位置を点 A_n とする。原点 O から水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、小球は xy 平面内で運動するものとする。床と小球の間の衝突は非弾性衝突であり、反発係数(はねかえり係数)を e ($0 < e < 1$) とする。重力加速度の大きさを g とし、小球の大きさおよび小球にはたらく空気抵抗は無視できるとして、以下の問に答えよ。解答は導出過程も含めて記述せよ。

問1 $0 \leq t \leq t_1$ の間に小球が到達する最高点の床面からの高さ h_1 を、 v_0 , θ , g を用いて表せ。

問2 距離 OA_1 (原点 O から点 A_1 までの距離) を、 v_0 , θ , g を用いて表せ。

問3 $t_1 \leq t \leq t_2$ の間に小球が到達する最高点の床面からの高さ h_2 および距離 A_1A_2 を、それぞれ v_0 , θ , g , e を用いて表せ。

問4 $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ の間に小球が到達する最高点の床面からの高さ h_{n+1} および距離 A_nA_{n+1} を、それぞれ v_0 , θ , g , e , n を用いて表せ。

問5 距離 OA_{n+1} および時刻 t_{n+1} を、それぞれ v_0 , θ , g , e , n を用いて表せ。ただし、等比数列の和の公式を用いること。

問6 問4で求めた h_{n+1} および問5で求めた t_{n+1} に対し、 $n \rightarrow \infty$ の極限 $H = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{n+1}$ および $T = \lim_{n \rightarrow \infty} t_{n+1}$ をそれぞれ求めよ。また、時刻 T 以後の小球の運動を簡潔に説明せよ。

問 7 小球が点 A_n で床と n 回目に衝突したとき、この衝突の前後で失われた小球の力学的エネルギーの大きさを v_0 , θ , e , n , m を用いて表せ。

問 8 $0 \leq t \leq T$ の間に失われた小球の力学的エネルギーの大きさの合計を求めよ。ただし、 $T = \lim_{n \rightarrow \infty} t_{n+1}$ である。

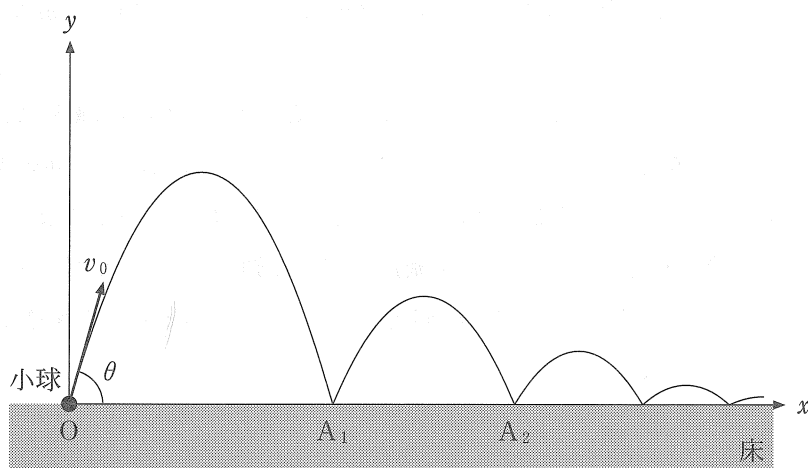


図 1

3

図 2 および図 3 に示すように、紙面内に xy 平面をとり、この平面内で形状の異なるコイルを動かす。 xy 平面は 3 つの領域に分かれており、 $0 \leq x \leq 2\ell_1$ の領域 2 では、 xy 平面に垂直で紙面の裏から表の向きに、磁束密度の大きさが B の一様な磁場(磁界)が存在する。 $x < 0$ の領域 1 および $2\ell_1 < x$ の領域 3 には、磁場は存在しない。コイルは変形しないものとし、コイルを形作る導線の太さおよびコイルの自己インダクタンスは無視できるものとする。重力の影響は無視できるものとして、以下の問に答えよ。解答は導出過程も含めて記述せよ。

問 1 図 2 のように、長方形のコイル $abcd$ を領域 1 の内側に置いた。コイルは辺 ad の長さが ℓ_1 で、辺 cd の長さが ℓ_2 である。また、コイルの抵抗は R である。辺 ad を x 軸に平行に、辺 cd を y 軸に平行に保ったまま、外力によって一定の速さ v でコイルを x 軸正の方向に動かし、辺 cd が $x = 2\ell_1$ の地点に到達するまで運んだ。時刻を t とし、辺 ab が $x = 0$ に到達した時刻を $t = 0$ とする。

- (1) $0 \leq vt < \ell_1$, $\ell_1 \leq vt \leq 2\ell_1$, および $2\ell_1 < vt \leq 3\ell_1$, におけるコイルを貫く磁束 Φ を、それぞれ v , ℓ_1 , ℓ_2 , R , B , t の中から必要なものを用いて表せ。また、それらをまとめて、横軸に t , 縦軸に Φ をとってグラフに表せ。ただし、 Φ は紙面の裏から表に向かう向きを正とする。
- (2) $0 \leq vt < \ell_1$, $\ell_1 \leq vt \leq 2\ell_1$, および $2\ell_1 < vt \leq 3\ell_1$, におけるコイルに流れる電流 I を、それぞれ v , ℓ_1 , ℓ_2 , R , B , t の中から必要なものを用いて表せ。また、それらをまとめて、横軸に t , 縦軸に I をとってグラフに表せ。ただし、 I は $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ の向きを正とする。
- (3) (2)の結果を用いて、 $0 \leq vt \leq 3\ell_1$ の間にコイルで生じたジュール熱の合計を求めよ。
- (4) $0 \leq vt < \ell_1$, $\ell_1 \leq vt \leq 2\ell_1$, および $2\ell_1 < vt \leq 3\ell_1$, におけるコイルに加えた外力の大きさ F を、それぞれ v , ℓ_1 , ℓ_2 , R , B , t の中から必要なものを用いて表せ。
- (5) (4)の結果を用いて、 $0 \leq vt \leq 3\ell_1$ の間に外力がした仕事の合計を求めよ。

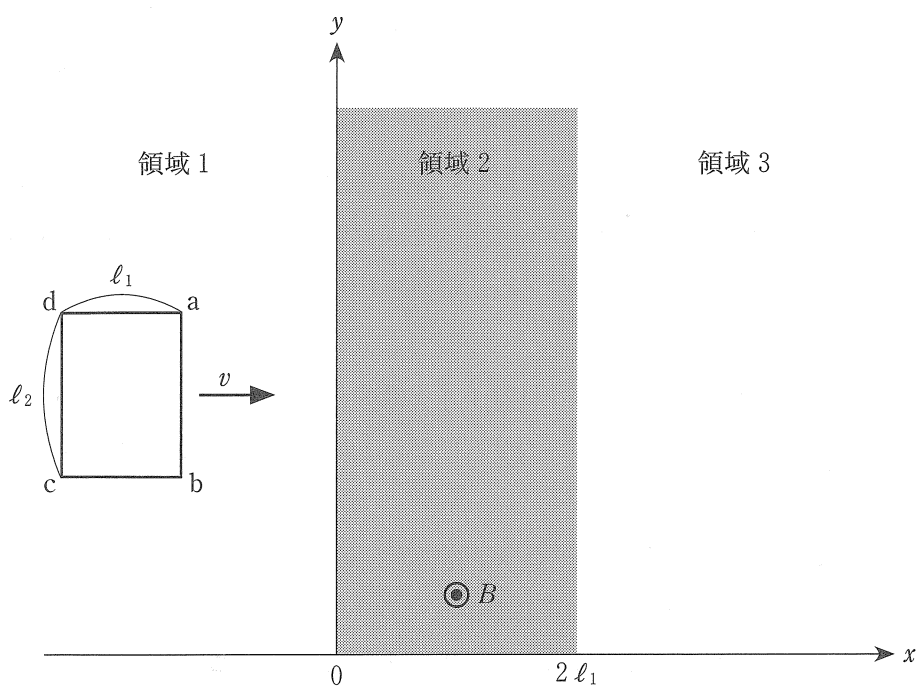


图 2

問 2 次に、図 3 のように、辺 ef と辺 eg の長さが等しい二等辺三角形のコイル efg を領域 1 の内側に置いた。コイルは底辺 fg の長さが ℓ_1 で、底辺 fg から頂点 e までの距離も ℓ_1 である。また、コイルの抵抗は R である。底辺 fg を y 軸に平行に保ったまま、外力によって一定の速さ v でコイルを x 軸正の方向に動かし、底辺 fg が $x = 0$ の地点に到達するまで運んだ。時刻を t とし、頂点 e が $x = 0$ に到達した時刻を $t = 0$ とする。

- (1) $0 \leq vt \leq \ell_1$ におけるコイルを貫く磁束 Φ を、 v, ℓ_1, R, B, t の中から必要なものを用いて表せ。ただし、 Φ は紙面の裏から表に向かう向きを正とする。
- (2) $0 \leq vt \leq \ell_1$ におけるコイルに流れる電流 I を、 v, ℓ_1, R, B, t の中から必要なものを用いて表せ。ただし、 I は $e \rightarrow f \rightarrow g$ の向きを正とする。
 なお、時刻 t における(1)の磁束を $\Phi(t)$ として、コイルに生じる誘導起電力の大きさは $\frac{d\Phi}{dt}$ の絶対値で与えられることを用いてよい。
- (3) $0 \leq vt \leq \ell_1$ におけるコイルに加えた外力の大きさ F を、 v, ℓ_1, R, B, t の中から必要なものを用いて表せ。
- (4) $0 \leq vt \leq \ell_1$ の間に外力がした仕事を求めよ。なお、時刻 t における(3)の外力の大きさを $F(t)$ として、仕事の大きさは以下の定積分

$$\int_0^{\frac{\ell_1}{v}} F(t) v dt$$

で与えられることを用いてよい。

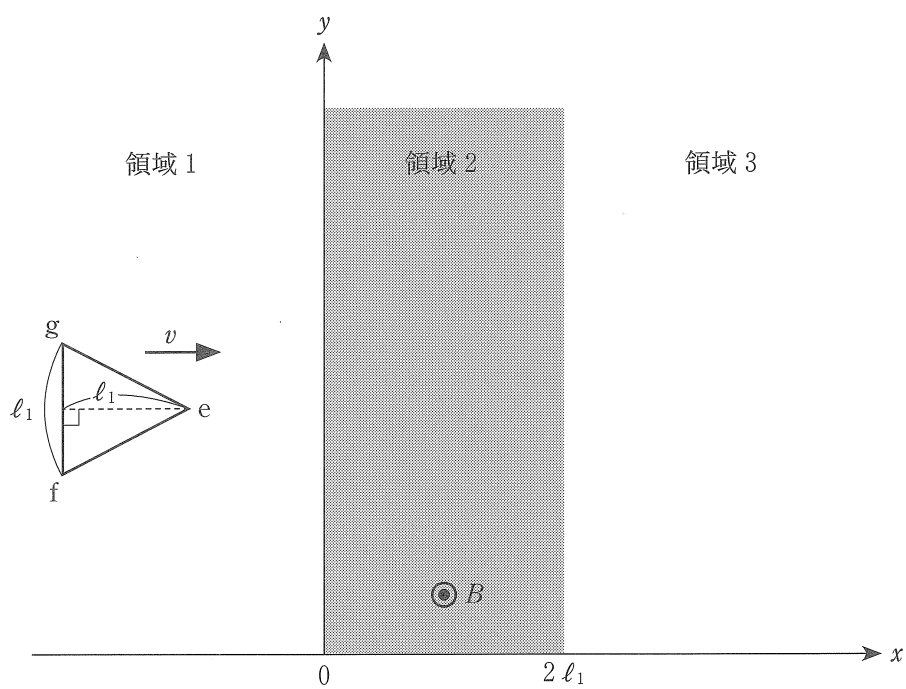


図 3