

令和 7 年度後期日程入学試験問題

数 学 C

理 学 部

注 意 事 項

- ① 試験開始の指示があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 問題冊子は、3 ページあります(表紙、白紙を除く)。
- ③ 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁、解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- ④ 問題は、**1** から **3** まで 3 問あります。すべてに解答しなさい。
- ⑤ 解答は、解答用紙(別紙、計 3 枚)に記入しなさい。
- ⑥ 解答用紙の指定の欄に、受験番号を記入しなさい。
- ⑦ 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示しなさい。

数 学 C

1 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($0 < x < \pi$) とする。 α は次の条件 (i) と (ii) を満たす実数とする。

(i) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

(ii) 座標平面において、曲線 $y = \sqrt{5} \cos x$ 上の点 $(\alpha, \sqrt{5} \cos \alpha)$ における法線は原点を通る。

以下の各問に答えよ。

- (1) $g(x) = x^2 f'(x)$ とする。 $g(x)$ を求め、関数 $g(x)$ の増減を調べよ。また、関数 $f(x)$ の増減を調べよ。
- (2) $f(2\alpha)$ を求めよ。また、条件 (i) と (ii) を満たす実数 α がただ 1 つ存在することを証明せよ。
- (3) 不等式 $\frac{3}{8}\pi < \alpha < \frac{5}{12}\pi$ が成り立つことを証明せよ。ただし、 $3 < \pi < 4$ であることは証明なしに用いてよい。
- (4) 座標平面において、曲線 $y = \sin(ax)$ ($0 \leq x \leq 1$) と直線 $x = 1$ および x 軸で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

- 2** a, b, c を正の定数とする。平面上に $\triangle ABC$ と点 I があり、次の等式を満たすとする。

$$a \overrightarrow{AI} + b \overrightarrow{BI} + c \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{0}$$

以下の各問に答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ および a, b, c を用いて表せ。また、点 I は $\triangle ABC$ の内部にあることを証明せよ。
- (2) 直線 AI と辺 BC の交点を P とする。 $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ および b, c を用いて表せ。
- (3) 点 I が $\triangle ABC$ の内心であるとき、 $BC : CA : AB = a : b : c$ が成り立つことを証明せよ。

3 n を自然数とし、 a_n を次の式で定める。

$$a_n = \int_0^1 \frac{n}{x+n} dx$$

以下の各問に答えよ。

(1) 関数 $f_n(x) = \frac{n}{x+n} - 1 + \frac{x}{n}$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値と最小値を求めよ。

(2) (1) の関数 $f_n(x)$ に対して、 b_n を次の式で定める。

$$b_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = 0$ であることを証明せよ。また、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$ を求めよ。

(3) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ を a_n を用いて表せ。また、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right\}$$

ただし、 e は自然対数の底とする。