平成25年度前期日程入学試験問題

数　　学　C

理　　学　　部

注 意 事 項

① 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

② 問題冊子は，2ページ(表紙，白紙を除く)です。試験開始後，確認して下さい。

③ 解答は，別紙の解答用紙に記入しなさい。

④ 受験番号は，解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入しなさい。

数　　学　C

1　原点をOとする座標平面上を運動する点P$(x,\ y)$が

$$x = \sin t,\ y = \sin 2t \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表されるとき，点Pの描く曲線をCとする。（Cは下図のようになっている。）

以下の各問に答えよ。

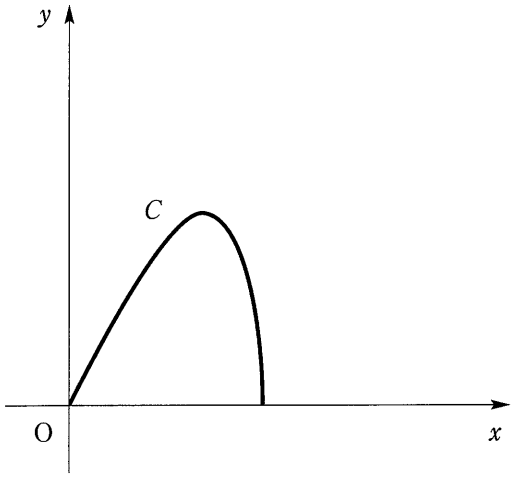
(1)　曲線Cとx軸が囲む図形の面積を求めよ。

(2)　$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$のとき，点PにおけるCの接線ℓの方程式を求めよ。

(3)　$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$のとき，(2)の接線ℓの傾きが負になるtの範囲を求めよ。

(4)　tが(3)で求めた範囲にあるとき，ℓとx軸，y軸との交点をそれぞれQ，Rとし，三角形OPQと三角形OPRの面積をそれぞれSとTとする。$c = \cos t$として，S，Tをそれぞれcを用いて表せ。

(5)　(4)のSとTについて$S = T$が成り立つとき，直線OPの方程式を求めよ。



2 $f(x)=x^3-x+5$ として，曲線 $y=f(x)$ を C とする。点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における C の接線を ℓ，法線を n とする。以下の各問に答えよ。ただし，点Pにおける C の法線とは，点Pを通り，かつ点Pにおける C の接線に直交する直線のことである。

(1) ℓ，n の方程式をそれぞれ求めよ。

(2) ℓ と C の共有点で，P以外のものの個数を求めよ。

(3) $|a|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときには，n と C との共有点がP以外にも存在することを示せ。

3 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ とし，$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とおく。また，2次の単位行列を E で表す。以下の各問に答えよ。

(1) $A^3=E$ を示せ。

(2) r を実数とする。自然数 k に対して，行列 $(rA)^{3k}+(rA)^{3k+1}+(rA)^{3k+2}$ の $(1,\ 1)$ 成分を a_k とおくとき，a_k を r を用いて表せ。

(3) 自然数 N に対して $x_N=2\sum_{k=0}^{N}a_k$ とする。ただし a_k は，$k\geqq 1$ のときは(2)で定めたものとし，$k=0$ のときは $a_0=1-\dfrac{1}{2}r-\dfrac{1}{2}r^2$ とおく。

$-1<r<1$ のとき，$f(r)=\lim_{N\to\infty}x_N$ を求めよ。

(4) r が $-1<r<1$ の範囲を動くとき，(3)で定めた $f(r)$ のとりうる値の範囲を求めよ。