令和４年度前期日程入学試験問題

数　　学　*B*

理　　学　　部

注意事項

① 試験開始の指示があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

② 問題冊子は，３ページ(表紙，白紙を除く)です。試験開始後，確認してください。

③ 問題は，$\boxed{1}$から$\boxed{3}$まで３問あります。すべてに解答しなさい。

④ 解答は，別紙の解答用紙に記入しなさい。

⑤ 受験番号は，解答用紙の指定の欄に用紙ごとに正しく記入しなさい。

⑥ 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示しなさい。

数　学　B

1　$f(x) = \log x + (\log x)^2$ とする。以下の各問に答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1)　関数 $y = f(x)$ の増減，極値，グラフと x 軸との交点，グラフの凹凸，変曲点，極限 $\lim_{x \to +0} f(x)$ および $\lim_{x \to \infty} f(x)$ を調べ，グラフの概形をかけ。

(2)　不定積分 $\int \log x \, dx$，$\int (\log x)^2 dx$ を求めよ。

(3)　曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 nを3以上の自然数とする。半径r_nの円O_nに内接する正n角形の周の長さが2であるとする。この正n角形の面積をa_nとし，円O_nに外接する正n角形の面積をb_nとする。ただし，正n角形が円に内接するとは，正n角形のすべての頂点がその円周上にあることをいう。また，正n角形が円に外接するとは，正n角形のすべての辺がその円に接することをいう。以下の各問に答えよ。

(1) r_nを求めよ。

(2) a_nを求めよ。

(3) b_nを求めよ。

(4) a_8の値を$p+q\sqrt{2}$の形で表すとき，pとqを求めよ。ただし，pとqは有理数とする。

(5) kを整数とする。数列$\{n^k(b_n-a_n)\}$が0でない値に収束するように，kの値を定めよ。さらに，そのときの極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k(b_n-a_n)$を求めよ。

$\boxed{3}$ A と B の 2 人が以下の**規則 I** と**規則 II** により点数を決めるゲームを行う。

規則 I：A は 1 個のさいころを 1 回投げて，出た目が偶数ならばそれを 2 で割ったときの商を A の点数とし，出た目が奇数ならば A の点数は 0 とする。

規則 II：B は 1 個のさいころを 1 回投げて，出た目を 3 で割ったときの余りを B の点数とする。

ゲームを行った結果，点数の大きい方を勝者とし，点数が同じ場合は引き分けとする。勝者が決まればそこでゲームは終了とし，引き分けの場合は同じ規則で次の回のゲームを行う。以降，勝者が決まるまでゲームを繰り返す。1 回のゲームで A が勝者となる確率を p，B が勝者となる確率を q，引き分けとなる確率を r とし，ゲームの回数が n 回以下で，A が勝者となる確率を P_n，B が勝者となる確率を Q_n とする。ただし，n は自然数とする。以下の各問に答えよ。

(1) p，q，r を求めよ。

(2) P_2 と Q_2 を求めよ。

(3) P_n と Q_n を求めよ。

(4) 極限値 $\lim_{n \to \infty} P_n$ と $\lim_{n \to \infty} Q_n$ を求めよ。