令和4年度学校推薦型選抜 入学試験問題

小論文 A

理学部　理学科

数学・情報数理コース

注意事項

① 試験開始の指示があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

② 問題冊子は，3ページ（表紙，白紙を除く）です。試験開始後，確認してください。

③ 問題は，$\boxed{1}$ から $\boxed{3}$ まで3問あります。すべてに解答しなさい。

④ 解答は，別紙の解答用紙に記入しなさい。

⑤ 受験番号は，解答用紙の指定の欄に用紙ごとに正しく記入しなさい。

⑥ 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示しなさい。

$\boxed{1}$ n を自然数とし，$f_n(x) = \dfrac{1}{n}e^{\frac{x}{n}}$ とする。座標平面における曲線 $C_n : y = f_n(x)$ について，以下の各問に答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) 曲線 C_n 上の点 $(a, f_n(a))$ における接線 ℓ_n の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C_n と 2 つの直線 $x = -n,\ x = n$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) (1) で求めた接線 ℓ_n と y 軸との交点の y 座標を $g_n(a)$ とする。次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \left(g_n(1) + g_n(2) + \cdots + g_n(n)\right)$$

$\boxed{2}$ a を実数の定数とする。以下の各問に答えよ。

(1) 次の等式を証明せよ。

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta < \theta < \tan\theta$ であることを証明することなしに用いてよい。

(2) 極限値

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + a^2} - x \right)$$

を求めよ。

(3) 極限値

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \sin\left(\sqrt{x^2 + a^2} - x\right)}{\sqrt{a^2x^2 + x}}$$

を求めよ。

$\boxed{3}$ 以下の各問に答えよ。

(1) 有理数 a, b, c, d が等式 $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ を満たすとき，$a=c$ かつ $b=d$ であることを証明せよ。ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明することなしに用いてよい。

(1) で証明したことにより，すべての自然数 n に対して

$$\left(1+2\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

となる有理数 a_n, b_n がただ一通りに定まる。

(2) a_{n+1} と b_{n+1} をそれぞれ a_n と b_n を用いて表せ。

(3) すべての自然数 n に対して，等式

$$\left(1-2\sqrt{2}\right)^n=a_n-b_n\sqrt{2}$$

が成り立つことを証明せよ。

(4) $a_n^2-2b_n^2$ を求めよ。