令和４年度後期日程入学試験問題

数　　学　*C*

理　　学　　部

注 意 事 項

① 試験開始の指示があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

② 問題冊子は，３ページ(表紙，白紙を除く)です。試験開始後，確認してください。

③ 問題は，$\boxed{1}$から$\boxed{3}$まで３問あります。すべてに解答しなさい。

④ 解答は，別紙の解答用紙に記入しなさい。

⑤ 受験番号は，解答用紙の指定の欄に用紙ごとに正しく記入しなさい。

⑥ 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示しなさい。

数　学　C

1 aを実数の定数とし，$f(x)=x^5-(1+a)x^3+ax$とする。座標平面上の曲線$C: y=f(x)$について，以下の各問に答えよ。

(1) $a=1$のとき，関数$y=f(x)$の増減，極値を調べ，グラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸，変曲点は調べなくてよい。

(2) 方程式$f(x)=0$が5つの異なる実数解をもつように，定数aの値の範囲を定めよ。

以下，$a>0$とする。

(3) 曲線C上の点$(0, f(0))$における接線をℓとする。接線ℓと曲線Cの共有点のx座標をすべて求めよ。

(4) (3)で定めた接線ℓと曲線Cで囲まれた部分のうち，領域$x \geqq 0$かつ$y \geqq 0$にある部分の面積をSとする。Sをaを用いて表せ。

2 e を自然対数の底とする。n を自然数とし，

$$k_n(x) = \frac{n - x}{x^2} \qquad (x > 0)$$

$$f_n(x) = e^{k_n(x)} - 1 \quad (x > 0)$$

とする。座標平面において，曲線 $y = f_n(x)$ と x 軸の交点を P_n とし，点 P_n における曲線 $y = f_n(x)$ の接線を ℓ_n とする。また，2 以上の n に対して，接線 ℓ_1 と接線 ℓ_n の交点を Q_n とし，$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n$ の大きさを θ_n とする。ただし，$0 < \theta_n < \pi$ とする。以下の各問に答えよ。

(1) $k_n(x)$ の導関数 $k'_n(x)$ と，$f_n(x)$ の導関数 $f'_n(x)$ を求めよ。

(2) 点 Q_n の座標を求めよ。

(3) 三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n$ の面積を S_n とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sin \theta_n$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標空間において，原点$\mathrm{O}(0, 0, 0)$と点$\mathrm{A}(\cos\theta, \sin\theta, 0)$を通る直線OAと，直線OA上にない点$\mathrm{B}(a, b, c)$について，以下の各問に答えよ。ただし，$0 \leqq \theta < \pi$とする。

(1) 直線OA上を動く点$\mathrm{P}(t\cos\theta, t\sin\theta, 0)$がある。ただし，$t$は実数全体を動くものとする。また，点Bと点Pの距離の2乗を$f(t)$とする。関数$f(t)$の最小値をa，b，cとθを用いて表せ。

以下では，$a^2 + b^2 \neq 0$かつ$c \neq 0$とし，点$(a, b, 0)$をB_0とする。(1)で求めた関数$f(t)$の最小値を$d(\theta)$とおく。θが$0 \leqq \theta < \pi$の範囲で動くとき，$d(\theta)$の最大値と最小値について考える。

(2) 2つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$が垂直であるとき，$d(\theta)$は最大値をとることを証明し，その最大値を$a$，$b$，$c$を用いて表せ。

(3) 2つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$が平行であるとき，$d(\theta)$は最小値をとることを証明し，その最小値を$a$，$b$，$c$を用いて表せ。